ÉTUDE DE L'ÉQUATION DE LA DIFFUSION AVEC CROISSANCE DE LA QUANTITÉ DE MATIÈRE ET SON APPLICATION A UN PROBLÈME BIOLOGIQUE

A. KOLMOGOROFF, I. PETROVSKY, N. PISCOUNOFF

Introduction.

Nous partons de l'équation de la diffusion que nous envisageons, pour plus de simplicité, en deux dimensions:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right), \quad k > 0. \tag{1}$$

x et y désignant les coordonnées d'un point du plan, t — le temps, v — la densité de la matière en un point (x, y) au moment t. Supposons maintenant qu'outre la diffusion ait lieu une croissance de la quantité de matière dont la vitesse, autour d'un point donné et au moment donné, dépend de la densité déjà présente. Nous obtiendrons alors l'équation

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) + F(v). \tag{2}$$

Bien entendu nous ne nous intéressons qu'aux valeurs de $F(v)$ avec $v \geqslant 0$. Nous supposons que $F(v)$ soit une fonction continue, admettant toutes les dérivées nécessaires dans le suivant par rapport à v et satisfaisant de plus aux conditions:

$$F(0) = F(1) = 0; \tag{3}$$

$$F(v) > 0, \quad 0 < v < 1; \tag{4}$$

$$F'(0) = \alpha > 0; \quad F'(v) < \alpha \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant v \leqslant 1. \tag{5}$$

Ainsi nous supposons que, v étant infiniment petit, la vitesse $F(v)$ de l'accroissement de v soit proportionnelle à v (avec le coefficient α de proportionnalité), et qu'il arrive un état de „Saturation", quand v s'approche de l'unité, et dès lors l'accroissement de v cesse. Conformément à celà nous considérerons seulement les solutions de l'équation (2) satisfaisant à la condition

$$0 \leqslant v \leqslant 1. \tag{6}$$

Les valeurs arbitraires initiales de v pour $t = 0$, qui satisfont à la relation (6), définissent une et une seule solution de notre équation (2) pour $t > 0$, soumise à la même condition (6) [1]).

[1]) On trouvera la démonstration au § 3.

Nous supposons ensuite que la densité v ne dépende pas de la coordonnée y. Dans ce cas l'équation fondamentale (2) sera de la forme

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + F(v). \tag{7}$$

Supposons maintenant qu'au moment initial $t = 0$, pour $x < a$ la densité s'annule et, pour $x > b \geqslant a$, elle atteigne sa plus grande valeur possible $v = 1$.

Bien entendu le domaine des densités voisines de l'unité se répand avec l'accroissement de t de droite à gauche en repoussant le domaine des petites densités à gauche. Dans le cas particulier $a = b$ tout se passe à peu près comme le montre la fig. 1. La portion de la courbe de densité (comme fonction de x), à laquelle se rapporte la partie principale du décroissement de 1 à 0 de la densité, se déplace avec le temps de droite à gauche. On reconnaît que la forme de la courbe de densité, pour $t \to \infty$, s'approche

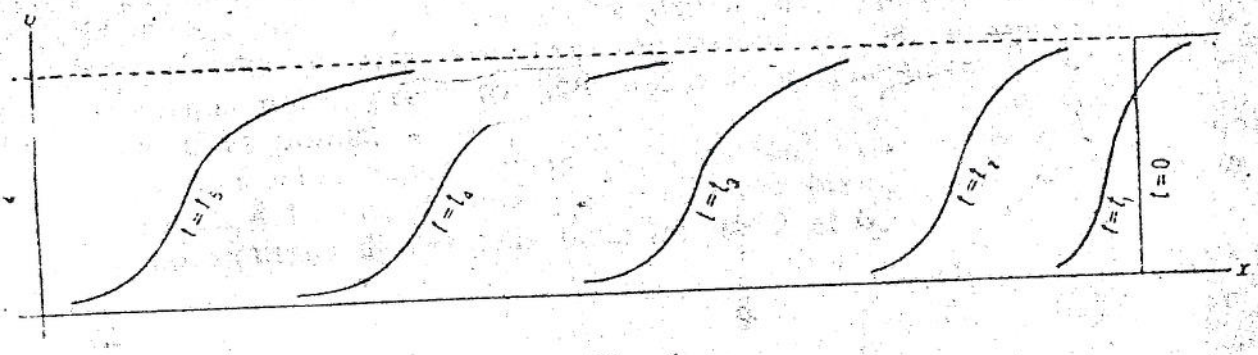

Fig. 1.

d'une certaine forme limite. Il s'agit de déterminer cette forme limite de la courbe de densité et la vitesse limite de son déplacement de droite à gauche. On démontre que la vitesse limite cherchée est égale à

$$\lambda_0 = 2\sqrt{k\alpha} \tag{8}$$

et que la forme limite de la courbe de densité est donnée par la solution de l'équation

$$\lambda_0 \frac{dv}{dx} = k \frac{d^2 v}{dx^2} + F(v) \tag{9}$$

s'annulant pour $x = -\infty$ et s'approchant à l'unité pour $x = +\infty$. Une telle solution existe toujours et est unique à une transformation $x' = x + c$ près qui ne change pas la forme de la courbe. Remarquons que l'équation (9) peut-être obtenue de la manière suivante. Cherchons une solution de l'équation (7) jouissant de la propriété qu'avec la variation de t la forme de la courbe représentant la dépendance entre v et x ne change pas, tandis que la courbe elle-même se déplace de droite à gauche avec la vitesse λ. Une telle solution sera de la forme

$$v(x, t) = v(x + \lambda t). \tag{10}$$

En considérant maintenant v comme fonction d'une seule variable $z = x + \lambda t$, nous obtenons l'équation

$$\lambda \frac{dv}{dz} = k \frac{d^2 v}{dz^2} + F(v).$$

Cette équation admet, comme on le trouve, pour tout $\lambda \geqslant \lambda_0$, des solutions satisfaisant aux conditions mentionnées relativement à l'équation (9). Mais seulement pour $\lambda = \lambda_0$ nous obtenons la forme limite, qui nous occupe, de la courbe de densité sous des conditions initiales indiquées ci-dessus. Pour comprendre ce fait, étrange à première vue, de l'existence des solutions de l'équation (7) de la forme (10) pour $\lambda > \lambda_0$, des solutions pour lesquelles le déplacement du domaine des grandes (voisines de l'unité) densités a lieu avec une vitesse supérieure à λ_0, nous examinons le cas limite $k = 0$. Dans ce cas il n'y a pas de diffusion et l'équation (7) s'intègre aisément. Dans nos conditions initiales, aux points $x < a$, où la densité initiale fut zéro, elle restera égale à zéro pour tout $t > 0$. Cependant, il est aisé de calculer qu'on peut trouver, pour tout λ positif, des solutions de l'équation (7) de la forme (10) satisfaisant à toutes les conditions nommées ci-dessus. Le déplacement apparent de la matière de droite à gauche y sera provoqué en réalité par la croissance de la densité en chaque point, provenant tout à fait indépendamment de ce qui se passe en d'autres points.

Les faits, exposés dans l'introduction, trouvent dans le § 1 une application à l'étude de quelques problèmes biologiques. On trouvera les démonstrations de ces faits dans les §§ 2 et 3.

§ 1.

Considérons maintenant un certain territoire peuplé par une espèce quelconque. Supposons d'abord qu'un certain gene dominant A soit répandu sur ce territoire avec une concentration constante p $(0 \leqslant p \leqslant 1)$. Supposons ensuite que des individus possèdant le caractère A (c. à d. appartenant aux genotypes AA et Aa), aient un avantage dans la lutte pour l'existence contre des individus ne possédant pas de ce caractère (appartenant au genotype aa): nous supposerons précisément que le rapport de la probabilité de survivre pour un individu possédant le caractère A, à la même probabilité d'un individu qui ne le possède pas, soit égal à

$$1 + \alpha = \frac{P(\text{survie avec } A)}{P(\text{survie sans } A)}$$

α étant un petit nombre positif. Alors, à des membres d'ordre de α^2 près, nous obtiendrons pour l'accroissement de la concentration due à une seule génération la formule [1])

$$\Delta p = \alpha p (1 - p)^2. \qquad (11)$$

Supposons maintenant que la concentration p soit différente en différents points du territoire occupé par l'espèce envisagée, c. à d. que p dé-

[1]) Voir R. A. Fisher, The Genetical Theory of Natural Selection, Oxford University Press, 1930.

pende des coordonnées x et y du point dans le plan. Si avec celà les individus de notre espèce restaient liés immobilement à des point fixes, la relation (11) aurait lieu comme auparavant. Admettons cependant que, dans l'intervalle entre la naissance et la réproduction, chaque individu se déplace dans une direction aléatoire (toutes les directions ayant la même probabilité) à une certaine distance. Soit $F(r)\,dr$ la probabilité d'un déplacement dont la distance est comprise entre r et $r + dr$, et

$$\varrho = \sqrt{\int_0^\infty r^2 f(r)\,dr}$$

le déplacement moyen quadratique. Nous obtiendrons alors au lieu de (11) la relation

$$\Delta p(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} p(\xi, \eta)\,\frac{f(r)}{2\pi r}\,d\xi\,d\eta - p(x, y) + \alpha p(x, y)\{1 - p(x, y)\}^2, \tag{12}$$

où

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}.$$

Nous supposons maintenant que l'on peut différentier p par rapport à x, y et au temps t (en comptant ce dernier par des générations), que α et ϱ soient très petits et que le troisième moment

$$d^3 = \int_0^\infty |r|^3 f(r)\,dr$$

soit petit par rapport à ϱ^2. Dans ce cas, en développant dans (12) $p(\xi, \eta)$ en série de Taylor suivant $\xi - x$ et $\eta - y$ et en se bornant aux membres du second ordre (les membres du premier ordre sont disparaissant), nous obtenons approximativement pour p l'équation différentielle [1])

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\varrho^2}{4}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right) + \alpha p(1 - p)^2. \tag{13}$$

A cette équation s'appliquent toutes les considérations qui se rapportent à l'équation générale (2).

Rappelons de nouveau les hypothèses qui ont été faites. Nous avons supposé que la concentration p varie continûment en dépendance du lieu et du temps (p pouvant être différentié par rapport à x, y et t), que ces variations soient évoquées par la sélection dans le rapport $(1 + \alpha) : 1$ au profit du critère dominant A et par des déplacements accidentels d'individus particuliers tels que le déplacement moyen quadratique d'un seul individu compté depuis la naissance jusqu'à la réproduction soit ϱ; et, enfin, que α et ϱ soient petits (ϱ — par rapport aux distances sur lesquelles se pro-

[1]) Au sujet du passage de (12) à (13) voir les considérations analogues, par exemple, chez A. Khintchine „Assymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung", Springer 1933.

duisent des changemments considérables de la concentration p). Dans ce cas, en mesurant le temps t par des générations, on obtient l'équation (13).

Examinons le cas où un territoire vaste est déjà occupé par le gene A avec une concentration p approchée de l'unité. Il doit naturellement se trouver le long de la frontière de ce domaine une bande de concentrations intermédiaires. Nous supposons qu'au delà de cette bande p soit voisin de zéro. Vu la sélection positive, le domaine occupé par le gene A va s'élargir; autrement dit, sa frontière va se déplacer vers les territoires non occupés encore par A, mais le long de cette frontière se conservera toujours une bande de concentrations intermédiaires. Notre premier problème est de déterminer la vitesse de la propagation du gene A, c. à. d. la vitesse du déplacement de la frontière. La formule (8) donne une réponse immédiate à cette question: comme k est dans le cas actuel égal à $\frac{\varrho^2}{4}$, la vitesse cherchée est égale à

$$\lambda = \varrho \sqrt{\alpha}. \tag{14}$$

En second lieu il s'agit naturellement de déterminer la largeur de la bande intermédiaire. En vertu de la formule (9) la concentration p satisfait, dans la direction de la normale à la frontière, à l'équation

$$\lambda \frac{dp}{dn} = \frac{\varrho^2}{4} \frac{d^2p}{dn^2} + \alpha p (1-p)^2$$

ou, en divisant par α et moyennant (14)

$$\frac{\varrho}{\sqrt{\alpha}} \frac{dp}{dn} = \frac{1}{4} \frac{\varrho^2}{\alpha} \frac{d^2p}{dn^2} + p(1-p)^2.$$

En introduisant une nouvelle variable

$$\nu = \frac{\sqrt{\alpha}}{\varrho} n \tag{15}$$

nous obtiendrons l'équation

$$\frac{dp}{d\nu} = \frac{1}{4} \frac{d^2p}{d\nu^2} + p(1-p)^2 \tag{16}$$

qui ne contient ni α, ni ϱ. Les conditions aux limites pour cette équation sont les mêmes que celles pour (9):

$$p(+\infty) = 1, \; p(-\infty) = 0.$$

On tire de la relation (15), que la largeur de la bande intermédiaire est proportionnelle à

$$L = \frac{\varrho}{\sqrt{\alpha}}. \tag{17}$$

Soient, par exemple, $\varrho = 1$, $\alpha = 0{,}0001$, alors $\lambda = 0{,}01$, $L = 100$.

§ 2.

Dans ce paragraphe nous considérons l'équation

$$\lambda \frac{dv}{dx} = k \frac{d^2v}{dx^2} + F(v), \tag{18}$$

λ et k étant positifs et la fonction $F(v)$ satisfaisant aux conditions énoncées dans l'introduction. Nous avons pour but de trouver les relations entre λ, k et $\alpha = F'(0)$ pour lesquelles cette équation aurait une solution satisfaisant aux conditions

$$0 \leqslant v(x) \leqslant 1,$$

$$v(x) \underset{x \to +\infty}{\to} 1 \quad \text{et} \quad v(x) \underset{x \to -\infty}{\to} 0.$$

Posons $\frac{dv}{dx} = p$, alors

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{dp}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} = \frac{dp}{dv} \cdot p.$$

En substituant dans l'équation (18), nous trouvons

$$\frac{dp}{dv} = \frac{\lambda p - F(v)}{kp}. \tag{19}$$

Nous nous intéressons aux courbes intégrales de cette équation qui passent dans le plan (p, v) entre les droites $v = 0$ et $v = 1$. En général il peut exister parmi celles-ci des courbes appartenant aux types suivants.

1. Des courbes intégrales qui ne s'approchent pas de l'une des droites $v = 0$, $v = 1$ à une distance inférieure à un certain $\varepsilon > 0$.

2. Des courbes intégrales qui s'éloignent infiniment de l'axe v en s'approchant assymptotiquement vers l'une des droites $v = 0$, $v = 1$.

3. Des courbes intégrales qui coupent l'une de ces droites en un point fini n'appartenant pas à l'axe v.

4. Des courbes intégrales qui n'appartiennent à aucun des types précédents et s'approchent des points $v = 0$, $p = 0$ et $v = 1$, $p = 0$.

Il est aisé de voir qu'aux courbes intégrales du premier type ne peuvent correspondre des solutions de l'équation (18) satisfaisant aux conditions énoncées, car pour elles v ne peut être aussi rapproché de zéro et de 1 comme on le voudra.

Les courbes intégrales du second type n'existent pas en général, car celles-ci devraient nécessairement posséder des points pour lesquels, $|p|$ étant très grand, la quantité $\left|\frac{dp}{dv}\right|$ serait très grande. Mais le quotient $\frac{\lambda p - F(v)}{kp}$ est, pour des valeurs très grandes de $|p|$, à peu près égal à $\frac{\lambda}{k}$ (puisque $F(v)$ est bornée sur l'intervalle $(0, 1)$).

Aux courbes intégrales du troisième type correspondent des solutions de l'équation (18) qui ne restent pas toujours entre 0 et 1. En effet, ad-

mettons par exemple qu'une courbe quelconque de ce type s'approche du point $v = 1$, $p = p_1 \neq 0$. Au voisinage de la droite $v = 1$,

$$\frac{dp}{dv} \approx \frac{\lambda}{k} \neq 0.$$

Par conséquent, on peut y considérer p en fonction de v, soit $p = \varphi(v)$. Comme $\varphi(1) = p_1 \neq 0$, $|\varphi(v)|$ resterait sur un certain petit intervalle $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$ supérieure à une certaine constante positive C. Désignons par x_0 la valeur de x pour laquelle $v = 1 - \varepsilon$. Alors, en intégrant l'équation $\frac{dv}{dx} = \varphi(v)$, nous obtenons

$$\int_{x_0}^{x} dx = x - x_0 = \int_{1-\varepsilon}^{v} \frac{dv}{\varphi(v)}.$$

Il en résulte que, v variant de $1 - \varepsilon$ jusqu'à $1 + \varepsilon$, les variations de x ne surpassent pas en valeurs absolues le nombre $\frac{2\varepsilon}{C}$. C'est pourquoi, x variant de x_0 jusqu'à $x_0 + \frac{2\varepsilon}{C}$, v passe nécessairement par 1.

Il nous reste à examiner les courbes intégrales du quatrième type. Chacun des points $v = 0$, $p = 0$ et $v = 1$, $p = 0$ est un point singulier de l'équation différentielle (19). La courbe intégrale du quatrième type doit se rapprocher de chacun de ces points sans avoir coupé les droites $v = 0$ et $v = 1$ en autres points. Ainsi, afin que de telles courbes existent, il faudrait que l'équation caractéristique pour chacun de ces points ait des racines réelles. Mettons $F(v)$ sous la forme

$$F(v) = av + \varphi_1(v).$$

Alors, évidemment, $\varphi_1(v) = o(v)$. Donc, l'équation caractéristique au point $v = 0$, $p = 0$ est de la forme

$$\begin{vmatrix} \lambda - \varrho & -a \\ k & -\varrho \end{vmatrix} = 0$$

où

$$\varrho^2 - \lambda\varrho + ak = 0. \tag{20}$$

Afin que cette équation ait des racines réelles, il faudrait que l'on ait

$$\lambda^2 \geqslant ak.$$

Pour obtenir l'équation caractéristique au point $v = 1$, $p = 0$, effectuons un changement de variables en posant $v = 1 - u$. Nous obtenons

$$\frac{dp}{du} = \frac{-\lambda p + \Phi(u)}{kp}$$

où

$$\Phi(u) = F(1 - u).$$

On a évidemment $F'(1) \leqslant 0$ et $\Phi'(0) = -F'(1) = A \geqslant 0$. Par conséquent,

$$\Phi(u) = Au + o(u)$$

et l'équation caractéristique au point $v = 1$, $p = 0$ prend la forme

$$\begin{vmatrix} -\lambda - \varrho & A \\ k & -\varrho \end{vmatrix} = 0$$

où

$$\varrho^2 + \lambda\varrho - Ak = 0. \tag{21}$$

Pour que cette équation admette des racines réelles, il faudrait que l'on ait

$$\lambda^2 \geqslant -4Ak.$$

Comme $\alpha > 0$, l'équation (20) a des racines réelles du même signe. Par conséquent (0,0) est un noeud. Toutes les courbes qui se trouvent au voisinage assez étroit de ce point, passent par lui. Dans le cas $A > 0$ l'équation (21) a des racines des différents signes. C'est pourquoi par ce point ne passent que deux courbes intégrales suivant des directions parfaitement déterminées; soient des directions données par les équations

$$m_1 u + n_1 p = 0$$

et

$$m_2 u + n_2 p = 0. \tag{22}$$

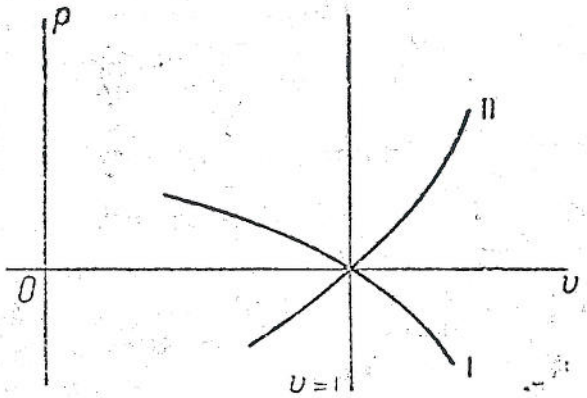

Fig. 2.

On sait [1]) que les coefficients m_1, n_1, m_2, n_2 se déterminent pas les équations

$$km_1 - \varrho_1 n_1 = 0$$

et

$$km_2 - \varrho_2 n_2 = 0, \tag{23}$$

ϱ_1, ϱ_2 étant les racines de l'équation caractéristique (21). Comme ces racines sont des différents signes, les coefficients angulaires des droites (22) sont aussi des signes différents [2]). C'est pourquoi dans chacun des angles formés par l'intersection des droites $v = 1$ et $p = 0$ ne passe qu'une courbe intégrale de l'équation (19) passant par le point $v = 1$, $p = 0$. Sur la fig. 2 ci-jointe est montrée la disposition schématique de ces courbes.

La courbe II coupe l'axe p au-dessous de l'origine, car l'équation (19) montre que $\frac{dp}{dv} > 0$ dans la partie de la bande renfermée entre les droites $v = 0$, $v = 1$ qui se trouve au-dessous de l'axe des v. En raison de celà il faut exclure la courbe II de la considération. Il reste à examiner la courbe I [3]).

---

[1]) Voir, par exemple, Bendixon, Acta mathematica, t. 24, 1900.

[2]) On peut démontrer de même que les deux coefficients angulaires des tangents aux courbes intégrales de l'équation (19) à l'origine sont positifs.

[3]) Si $A=0$, on peut affirmer seulement qu'il existe au moins une courbe intégrale du type I s'approchant vers le point (1,0) dans la direction ayant le coefficient angulaire négatif. (Voir I. Petrowsky, Über das Verhalten der Integralkurven eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen..., Recueil Mathématique, t. 41, p. 107—156, 1934.)

Nous voulons démontrer que les courbes I coupent l'axe p à l'origine. Démontrons avant tout que ces courbes ne peuvent couper l'axe p au-dessous de l'origine. Considérons pour celà les isoklines de l'équation (19). L'équation de cette famille est de la forme

$$\frac{\lambda p - F(v)}{kp} = C, \tag{24}$$

C étant la valeur de $\frac{dp}{dv}$ au point (v, p). D'où

$$p = \frac{F(v)}{\lambda - Ck}. \tag{24'}$$

L'équation (24) présente une famille de courbes passant par les points (0,0) et (1,0). Cette famille est montrée d'une façon schématique sur la fig. 3. On voit à côté de chaque courbe la valeur de C qui lui correspond. La ligne grosse marque la courbe correspondant à $C = 0$. A mesure que les sommets des courbes s'élèvent, grandit respectivement C, en s'approchant de la quantité $\frac{\lambda}{k}$ qui correspond aux droites $v = 0$, $v = 1$; dans le domaine renfermé entre la courbe $C = 0$ et l'axe des v (haché sur la fig. 3) on a $C < 0$, C étant d'ailleurs très grand en valeur absolue aux points rapprochés de l'axe des v. Au-dessous de l'axe des v, $C > 0$, le sommet de la courbe s'abaissant du niveau de l'axe des v jusqu'à $-\infty$, C décroît de $+\infty$ jusqu'à $\frac{\lambda}{k}$.

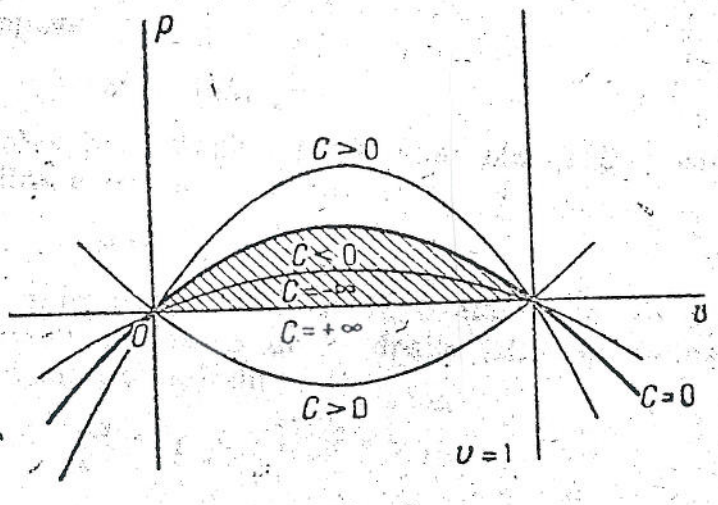

Fig. 3.

Maintenant on voit aisément que la courbe intégrale du type 1 (fig. 2) ne peut couper l'axe des p au-dessous de l'origine. En effet, dans ce cas la courbe I devrait couper l'axe des v. $\frac{dp}{dv}$ étant égal à $-\infty$ au-dessus de cet axe et à $+\infty$ au-dessous de cet axe, la convexité de la courbe intégrale I, au point d'intersection avec l'axe v, est tournée vers la droite $v = 1$. Donc, pour que cette courbe atteigne le point (1,0) il faudrait que $\frac{dp}{dv}$ devienne ∞ au-dessus de l'axe v, ce qui est impossible. En raison de celà les courbes intégrales I ne peuvent couper la droite $v = 1$ au-dessus de l'axe v.

Démontrons maintenant que la courbe intégrale I ne peut couper l'axe p au-dessus de l'origine. Pour celà il suffit de démontrer qu'il existe une demi-droite, passant par l'origine et traversant le premier quadrant, qui n'est coupée par aucune des courbes intégrales rencontrant l'axe p dans sa partie positive. Passons maintenant à la démonstration de l'existence d'une telle demi-droite.

De l'équation (24) nous obtenons [1])

$$\left(\frac{d\overline{p}}{dv}\right)_{v=0} = \frac{a}{\lambda - Ck}.$$

Déterminons C de manière que $\left(\frac{d\overline{p}}{dv}\right)_{v=0} = C$. Nous en obtenons l'équation

$$\frac{a}{\lambda - Ck} = C$$

où

$$kC^2 - C\lambda + a = 0$$

d'où

$$C = \frac{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4ak}}{2k}. \tag{25}$$

Comme nous avons supposé que

$$\lambda^2 \geqslant 4ak,$$

les deux valeurs de C fournies par l'égalité (25), sont réelles et positives. Désignons par C l'une d'elles et menons la droite

$$p = C_0 v. \tag{26}$$

On voit aisément que pour tous points de la bande entre les droites $v = 0$ et $v = 1$, qui se trouvent au-dessus de la droite (26) ou même sur cette droite (l'origine seule étant exclue) on a [2])

$$\frac{dp}{dv} > C_0.$$

Ainsi, aucune courbe intégrale passant par un point quelconque de l'axe p, situé au-dessus de l'origine, ne coupera jamais la partie de la droite (26) qui est située au-dessus de l'axe v. Nous avons ainsi démontré que chaque courbe intégrale du type I (fig. 2) passe par l'origine.

Nous allons démontrer qu'il n'existe qu'une seule courbe intégrale du type I. (Cette démonstration est certainement nécessaire dans le seul cas $A = 0$.) En effet, nous avons démontré que toutes les courbes du type I passent par l'origine. D'autre part, il résulte de l'égalité (19) que, pour $p > 0$, $\frac{dp}{dv}$ croît avec p, v restant invariable. Il en résulte que deux courbes intégrales sortant de l'oirgine ne peuvent passer par point (1,0).

Démontrons maintenant qu'à la courbe I correspond une solution de l'équation (18) satisfaisant aux conditions énoncées au début. Remarquons avant tout qu'aucune perpendiculaire à l'axe v ne coupe la courbe intégrale I de l'équation (19) qu'en un seul point, car autrement $\frac{dp}{dv}$ deviendrait ∞ au-dessus de l'axe v. C'est pourquoi p est une fonction de v, $p = \varphi(v)$,

---

[1]) Ici $\frac{d\overline{p}}{dv}$ désigne la dérivée de la fonction $p = p(v)$ définie par l'équation (24').

[2]) P étant lié à v par l'équation (18).

le long de cette courbe. Rappelons encore que la courbe I coupe l'axe v au point (1,0) sous un angle dont la tangente est négative, et à l'origine — sous un angle dont la tangente est positive. Ainsi pour de petites valeurs de v,

$$p = k_1 v + o(v) \tag{27}$$

et pour de petites valeurs de $1 - v$,

$$p = k_2(1 - v) + o(1 - v), \tag{28}$$

k_1 et k_2 étant positifs.

Rappelons maintenant que $p = \frac{dv}{dx}$. Donc $\frac{dv}{dx} = \varphi(v)$ ou $dx = \frac{dv}{\varphi(v)}$. En intégrant la dernière égalité, nous obtenons

$$x - x_0 = \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{\varphi(v)}, \quad 0 < v_0 < 1.$$

En vertu des relations (27) et (28), il résulte que pour $v \to 0$, $x \to -\infty$, et pour $v \to 1$, $x \to +\infty$, c. q. f. d.

§ 3.

Au lieu de l'équation (7), dont nous avons parlé dans l'introduction, nous considérerons dans ce paragraphe l'équation

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = F(v) \tag{29}$$

où la fonction $F(v)$ satisfait aux conditions suivantes:

$$F(0) = F(1) = 0; \tag{30}$$

$$F(v) > 0, \quad 0 < v < 1; \tag{31}$$

$$F'(0) = 1; \tag{32}$$

$$F'(v) < 1 \quad \text{pour} \quad 0 < v \leqslant 1, \tag{33}$$

$F''(v)$ est bornée et continue sur l'intervalle (0,1). Outre celà on suppose qu'on puisse différentier $F(v)$ plusieurs fois. C'est justement à la forme (29) qu'on peut toujours réduire l'équation générale (7) donnée dans l'introduction, à l'aide du changement des variables

$$x = \sqrt{\frac{k}{a}}\,\bar{x} \quad \text{et} \quad t = \frac{\bar{t}}{a}.$$

Le but principal de ce paragraphe est de démontrer que, pour $t \to +\infty$, la portion de la courbe de densité $v(x, t)$ (en fonction de x) sur laquelle tombe la partie fondamentale de l'abaissement de 1 à 0, se déplace avec le temps à gauche avec une vitesse qui s'approche de 2 inférieurement; et la forme de la courbe de densité s'approche de celle de la courbe représentant la solution $u(x)$ de l'équation

$$\frac{d^2u}{dx^2} - 2\frac{du}{dx} + F(u) = 0 \tag{34}$$

qui devient zéro pour $x \to -\infty$ et 1 pour $x \to +\infty$; l'existence d telle solution a été démontrée dans le § 2.

Avant d'entreprendre la démonstration des propositions fondamenta de ce paragraphe, nous allons démontrer l'existence d'une solution d l'équation

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = F(x, t, v)$$

dont un cas particulier est l'équation (29), prenant des valeurs données pour $t = 0$, et nous en étudierons les propriétés.

Théorème 1. *Soit l'équation*

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = F(x, t, v) \tag{35}$$

où la fonction continue et bornée $F(x, t, v)$ satisfait à la condition de Lipschitz par rapport à v et x, c. à. d.

$$|F(x_2, t, v_2) - F(x_1, t, v_1)| < k|x_2 - x_1| + k|v_2 - v_1|, \tag{36}$$

k étant une constante indépendante de x, t et v. Soit $f(x)$ une fonction bornée, définie pour toutes les valeurs de x. Pour plus de simplicité nous supposerons que $f(x)$ ne possède qu'un nombre fini de points de discontinuité. Alors il n'existe qu'une seule fonction bornée $v(x, t)$ pour t bornée qui, pour $t > 0$, satisfait à l'équation (35) et qui, pour $t = 0$, est égale à $f(x)$ dans touts les points de continuité de cette fonction. Dans la suite, en disant, pour plus de briéveté, que $v(x, t)$ devient égale à $f(x)$ pour $t = 0$, nous y entendrons seulement les points de continuité de cette fonction.

Démonstration. Soit $v_0(x, t)$ une fonction bornée satisfaisant pour $t > 0$ à l'équation

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \tag{37}$$

et égale à $f(x)$ pour $t = 0$. En substituant cette fonction à la place de v dans le second membre de l'équation (35) nous trouvons, d'après la formule

$$\tilde{v}_1(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\eta)}}}{\sqrt{t-\eta}} F(\xi, \eta, v_0(\xi, \eta)) d\xi \tag{38}$$

la solution de cette équation prenant la valeur 0 sur $t = 0$ (voir Gevrey, Journal de math. pures et appliquées, 1914, p. 308). La fonction

$$v_1(x, t) = v_0(x, t) + \tilde{v}_1(x, t)$$

est pour $t = 0$ égale à $f(x)$ et satisfait pour $t > 0$ à l'équation

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} = F(x, t, v_0(x, t)).$$