En général, d'après la formule

$$v_{i+1}(x,\ t) = v_0(x,\ t) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\eta)}}}{\sqrt{t-\eta}} F(\xi, \eta, v_i(\xi,\eta)\, d\xi \quad (39)$$

nous obtenons une fonction $v_{i+1}(x,\ t)$ satisfaisant pour $t > 0$ à l'équation

$$\frac{\partial v_{i+1}}{\partial t} - \frac{\partial^2 v_{i+1}}{\partial x^2} = F(x,\ t,\ v_i) \quad (40)$$

et se réduisant à $f(x)$ pour $t = 0$.

Démontrons que la suite des fonctions $v_i(x,\ t)$ converge uniformément. En effet, en tenant compte de (36), nous trouvons d'après l'égalité (39)

$$M_{i+1}(t) = \text{Born} \sup_{\eta \leqslant t} |v_{i+1}(x,\ \eta) - v_i(x,\ \eta)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\eta)}}}{\sqrt{t-\eta}} |F(\xi,\ \eta,\ v_i(\xi,\eta)) - F(\xi,\ \eta,\ v_{i-1}(\xi,\eta))|\, d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^t k M_i(\eta)\, d\eta \quad (41)$$

parce que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\eta)}}}{\sqrt{t-\eta}}\, d\xi = 2\sqrt{\pi}$.

Or, en désignant par M_0 la borne supérieure des valeurs de $|f(x)|$ et de $|F(x,\ t,\ 0)|$ nous obtenons

$$|v_0(x,\ t)| \leqslant M_0$$

d'où, à l'aide de l'égalité (38),

$$M_1 \leqslant \int_0^t (k+1) M_0 dt = (k+1) M_0 t = Mt.$$

Moyennant l'inégalité (41), nous en tirons aisément

$$M_i \leqslant \frac{M k^{i-1} t^i}{i!}$$

d'où l'on obtient tout simplement la convergence uniforme de v_i.

Posons

$$v(x,\ t) = \lim_{i \to \infty} v_i(x,\ t).$$

La fonction $v(x,\ t)$ devient $f(x)$ pour $t = 0$. D'autre part, comme on voit aisément, elle satisfait à l'équation

$$v(x,\ t) = v_0(x,\ t) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\eta)}}}{\sqrt{t-\eta}} F(\xi, \eta, v(\xi,\eta))\, d\xi. \quad (42)$$

Il en résulte que $v(x, t)$ est une fonction continue de x et t po $t > 0$. Dans le mémoire déjà cité de Gevrey on trouve (pp. 343—34 la démonstration que pour toute fonction bornée F le second terme de la droite partie de la dernière égalité admet une dérivée bornée par rapport à x. Il résulte, vu la condition (36), que la fonction $F(x, t, v(x, t))$ admet des nombres dérivés finis par rapport à x pour $t > 0$; c'est pourquoi $v(x, t)$ (voir l'oeuvre cité de Gevrey, p. 351) satisfait à l'équation (35).

On démontre l'unicité de la solution bornée de la manière suivante. Admettons qu'il existe deux fonctions bornées $v_1(x, t)$ et $v_2(x, t)$ prenant les mêmes valeurs pour $t = 0$. Alors elles doivent satisfaire à l'équation

$$v_2(x, t) - v_1(x, t) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\eta)}}}{\sqrt{t-\eta}} [F(\xi, \eta, v_2) - F(\xi, \eta, v_1)]\, d\xi. \quad (43)$$

Posons

$$M(t) = \operatorname*{Born\,sup}_{t \geqslant \eta} |v_2(x, \eta) - v_1(x, \eta)|,$$

alors nous obtenons de (43) à l'aide de (36)

$$M(t) \leqslant k \int_0^t M(\eta)\, d\eta$$

ce qui est impossible.

Remarque. Il est démontré dans le mémoire de Gevrey cité plus haut que dans un domaine limité à gauche et à droite par des lignes quelconques $x = \varphi_1(t)$, $x = \varphi_2(t)$, et d'en haut et d'en bas par les droites $t = t_0$ et $t = t_1 > t_0$, il existe une seule fonction bornée satisfaisant à l'intérieur de ce domaine à l'équation (35) et prenant sur les lignes $x = \varphi_1(t)$, $x = \varphi_2(t)$ et $t = t_0$ des valeurs données bornées et continues. On pourrait démontrer d'une façon analogue l'existence et l'unicité de la fonction bornée satisfaisant à l'équation (35) à l'intérieur du domaine G, limité seulement d'un côté par une ligne $x = \varphi(t)$ et du haut ainsi que d'en bas par les droites $t = t_0$ et $t = t_1 > t_0$, et prenant des valeurs données bornées et continues sur la ligne $x = \varphi(t)$ et sur la droite $t = t_0$.

Théorème 2. *En remplaçant la fonction $F(x, t, v)$ par une autre fonction $F_1(x, t, v)$ telle qu'on ait partout*

$$F_1(x, t, v) \geqslant F(x, t, v)$$

on ne diminue pas la fonction $v(x, t)$, pourvu que les conditions initiales ne changent pas.

Remarque. Si l'on interprète l'équation (35) comme une équation de la propagation de la chaleur, la fonction $F(x, t, v)$ caractérise l'intensité de la création de la chaleur, et le théorème devient physiquement évident.

Démonstration. Soient les fonctions $v(x, t)$ et $v_1(x, t)$ satisfassent respectivement à l'équation (35) et à l'équation

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} = F_1(x, t, v_1).$$

En les retranchant membre à membre, on verra que la fonction

$$w(x, t) = v_1(x, t) - v(x, t)$$

satisfait à l'équation

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = F_1(x, t, v_1) - F(x, t, v).$$

Posons

$$w(x, t) = \overline{w}(x, t)\, e^{-kt},$$

k étant le même nombre que dans l'égalité (36). Alors

$$\frac{\partial \overline{w}}{\partial t} - \frac{\partial^2 \overline{w}}{\partial x^2} = k\overline{w} + e^{kt}\,[F_1(x, t, v_1) - F(x, t, v)],$$

d'où

$$\overline{w}(x, t) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\eta)}}}{\sqrt{t-\eta}} \{ k\overline{w} + e^{k\eta}\,[F_1(\xi, \eta, v_1) - F(\xi, \eta, v] \}\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\eta)}}}{\sqrt{t-\eta}} \{ k\overline{w} + e^{k\eta}\,[F_1(\xi, \eta, v_1) - F(\xi, \eta, v_1) +$$

$$+ F(\xi, \eta, v_1) - F(\xi, \eta, v)] \}\, d\xi \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\eta)}}}{\sqrt{t-\eta}} \{ k\overline{w} + e^{k\eta}\,[F(\xi, \eta, v_1) - F(\xi, \eta, v)] \}\, d\xi \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\eta)}}}{\sqrt{t-\eta}} (k\overline{w} - k\,|\overline{w}|)\, d\xi. \qquad (44)$$

L'expression en crochets est égale à zéro, si $\overline{w} \geqslant 0$, et à $-2k\overline{w}$, si $\leqslant 0$. Désignons par $-m(t)$ la borne inférieure des valeurs de $w(\xi, \eta) - |\overline{w}(\xi, \eta)|$ pour $\eta \leqslant t$. Pour la démonstration de notre théorème, il suffit évidemment de démontrer que $m(t) \equiv 0$. Et pour celà nous remarquerons que de l'inégalité (44) il résulte

$$w(x, t) \geqslant -k \int_0^t m(\eta)\, d\eta$$

donc

$$m(t) \leqslant k \int_0^t m(\eta)\, d\eta$$

ce qui est possible seulement pour $m(t) \equiv 0$, c. q. f. d.

Théorème 3. *$v(x, t)$ ne peut diminuer lorsque $f(x)$ grandit.*

Physiquement le sens de ce théorème est aussi clair comme celui précédent, si l'on interprète l'équation (35) comme équation de la propagation de la chaleur dans une tige. La fonction $f(x)$ représente la température initiale de la tige. Quand cette température augmente, $v(x, t)$ augmente aussi.

Démonstration du théorème 3. Soient $v_1(x, t)$ et $v_2(x, t)$ deux fonctions satisfaisant à l'équation (35) et devenant pour $t=0$ égales à $f_1(x)$ et à $f_2(x)$ respectivement $f_2(x) \geqslant f_1(x)$. Démontrons que $v_2 \geqslant v_1$.

La fonction $w = v_2 - v_1$ satisfait à l'équation

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = F(x, t, v_2) - F(x, t, v_1).$$

D'après la condition (36) on a

$$F(x, t, v_2) - F(x, t, v_1) \geqslant -k|w|.$$

Donc, d'après le théorème 2, la fonction $w(x, t)$ n'est pas inférieure à la fonction $v^*(x, t)$ qui, pour $t=0$, devient $f_2(x) - f_1(x) \geqslant 0$ et, pour $t > 0$, satisfait à l'équation

$$\frac{\partial v^*}{\partial t} - \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^2} = -k|v^*|.$$

La solution bornée, pour t bornée (unique d'après le théorème 1) de cette équation est présentée par la fonction $e^{-kt} v^{**}$, en désignant par $v^{**}(x, t)$ la solution de l'équation (37) se réduisant pour $t=0$ à $f_2(x) - f_1(x)$ (solution évidemment non négative). Par conséquent

$$w = v_2 - v_1 \geqslant 0,$$

c. q. f. d.

Théorème 4. *Si $f(x) \geqslant 0$ partout et $F(x, t, 0) = 0$, on a aussi*

$$v(x, t) \geqslant 0.$$

Démonstration. D'après le théorème 3 la fonction $v(x, t)$ ne peut pas croître lorsque $f(x)$ diminue. Pour $f(x) \equiv 0$ on a $v(x, t) \equiv 0$. Par conséquent, pour $f(x) \geqslant 0$, on a $v(x, t) \geqslant 0$, c. q. f. d.

Théorème 5. *Si, outre les conditions du théorème 4, on a $f(x) > 0$ sur certain intervalle de longueur positive, alors pour $t > 0$*

$$v(x, t) > 0.$$

La démonstration découle de celle du théorème 3, lorsqu'on y pose $v_2 = v$ et $v_1 = 0$ et tient compte de ce que $v^{**}(x, t)$, étant représentée par une intégrale de Poisson, est nécessairement positive pour $t > 0$.

Théorème 6. *Si $F(x, t, 1) \equiv 0$ et $f(x) \leqslant 1$, on a $v(x, t) \leqslant 1$.*

Démonstration. D'après le théorème 3, la fonction $v(x, t)$ ne peut décroître quand $f(x)$ croît. Si $f(x) \equiv 1$, la fonction $v(x, t) \equiv 1$, d'où résulte le théorème énoncé.

Théorème 7. *Si la fonction $v(x, t)$ se confond, pour $t = 0$, avec la fonction croissante et dérivable $f(x)$, et que, pour $t > 0$, elle satisfasse à l'équation*

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = F(t, v) \tag{45}$$

croissante

alors $v(x, t)$ est, pour $t > 0$, une fonction non décroissante de x.

Démonstration. D'après le théorème 1,

$$v(x, t) = v_0(x, t) + \\ + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(\eta, v(\xi, \eta))\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\eta)}}}{\sqrt{t-\eta}}\, d\xi, \tag{46}$$

où $v_0(x, t)$ satisfait à l'équation

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \tag{47}$$

pour $t > 0$ et se réduit à $f(x)$ pour $t = 0$. Si $f(x)$ est dérivable, $v'_{0x}(x, t)$ s'approche de $f'(x)$, quand le point (x, t) s'approche de $(x, 0)$[1]. D'autre part, la dérivée partielle par rapport à x de la seconde composante de la partie droite de (46) n'est pas supérieure en valeur absolue à $\frac{4}{\sqrt{\pi}} M t^{\frac{1}{2}}$ si $|F| \leqslant M$[2]. Par conséquent, $v'_x(x, t)$ s'approche de $f'(x)$ quand $t \to 0$. Si l'on suppose de plus que la fonction $v(x, t)$ admette des dérivées $\frac{\partial^2 v}{\partial t\, \partial x}$ et $\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}$, ce qui a lieu lorsque $F(t, v)$ admet trois dérivées successives par rapport à v, alors la fonction $w(x, t) = v'_x(x, t)$ satisfait à l'équation

$w_0 = v_{x0} = f' \geq 0$
et $\tilde{F}(x,t,w) = w\, \partial_v F(t,v)$
vaut 0 en $w=0$

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial F}{\partial v} w. \tag{48}$$

Alors, en appliquant le théorème 4, nous trouvons que $w(x, t) \geqslant 0$, c. q. f. d.

Théorème 8. *Si $f^{(\varepsilon)}(x) \underset{\varepsilon \to 0}{\to} f^{(0)}(x)$ de manière que*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| f^{(\varepsilon)} - f^{(0)} \right| dx \to 0,$$

alors pour chaque $t > 0$ la fonction $v^{(\varepsilon)}(x, t)$ satisfaisant à l'équation (35) pour $t > 0$ et se réduisant à $f^{(\varepsilon)}(x)$ pour $t = 0$, s'approche de la fonction $v^{(0)}(x, t)$ qui satisfait aussi à l'équation (35) pour $t > 0$, mais qui se réduit à $f^{(0)}(x)$ pour $t = 0$.

---

[1] Gevrey, l. c., p. 330—331.
[2] Gevrey, l. c., p. 334.

Démonstration. Déterminons $v^{(\varepsilon)}(x, t)$ et $v^{(0)}(x, t)$ par la méthode des approximations successives comme nous l'avons fait dans la démonstration du théorème 1. Les fonctions $v_0^{(\varepsilon)}$ et $v_0^{(0)}$ se déterminent respectivement par les formules

$$v_0^{(\varepsilon)}(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f^{(\varepsilon)}(\xi) \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}}{\sqrt{t}} d\xi,$$

$$v_0^{(0)}(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f^{(0)}(\xi) \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}}{\sqrt{t}} d\xi.$$

On voit immédiatement que pour $t > 0$

$$v_0^{(\varepsilon)}(x, t) \underset{\varepsilon \to 0}{\to} v_0^0(x, t).$$

La quantité $\tilde{v}_1^{(\varepsilon)}(x, t) - \tilde{v}_1^{(0)}(x, t)$ (les notations sont les mêmes que dans le théorème (1)) est donnée par la formule

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\eta)}}}{\sqrt{t-\eta}} [F(\xi, \eta, v_0^{(\varepsilon)}) - F(\xi, \eta, v_0^{(0)})] d\eta,$$

d'où

$$v_1^*(x, t) = |\tilde{v}_1^{(\varepsilon)}(x, t) - \tilde{v}_1^{(0)}(x, t)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{k}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\eta)}}}{\sqrt{t-\eta}} |v_0^{(\varepsilon)}(\xi, \eta) - v_0^{(0)}(\xi, \eta)| d\xi.$$

Posons

$$v_0^*(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f^{(\varepsilon)}(\xi) - f^{(0)}(\xi)| \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\eta)}}}{\sqrt{t}} d\xi.$$

Il est évident que

$$v_0^*(x, t) \geqslant |v_0^{(\varepsilon)}(x, t) - v_0^{(0)}(x, t)|$$

et par suite

$$v_1^*(x, t) \leqslant \frac{k}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\eta)}}}{\sqrt{t-\eta}} v_0^*(\xi, \eta) d\xi =$$

$$= k \int_0^t v_0^*(x, t) d\eta = k t v_0^*(x, t).$$

L'égalité avant-dernière ayant lieu parce que $v_0^*(x, t)$ satisfait à l'équation (47). Ainsi

$$v_1^*(x, t) \leqslant k t v_0^*(x, t).$$

D'une façon tout à fait analogue nous trouvons que

$$v_i^*(x, t) = |v_i^{(\varepsilon)}(x, t) - v_i^{(0)}(x, t)| \leqslant \frac{(kt)^i}{i!} v_0^*(x, t).$$

Il résulte qu'en choisissant ε assez petit, nous pouvons faire la quantité $\sum_{i=0}^{\infty} v_i^*(x, t)$, et par conséquent aussi $|v^{(\varepsilon)}(x, t) - v^{(0)}(x, t)|$ arbitrairement petite, c. q. f. d.

$v_t - v_{xx} = F(t, v)$ $v_0 = H$

Théorème 9. *La fonction $v(x, t)$, qui satisfait à l'équation* (45) *pour $t > 0$, s'annule pour $t = 0$, $x < 0$ et devient égale à l'unité pour $t = 0$, $x > 0$, est une fonction non décroissante de x, et l'on a $v'_x(x, t) > 0$ pour $t > 0$.*

croissante

Démonstration. En vertu du dernier théorème, on peut considérer la fonction $v(x, t)$ comme la limite pour $\varepsilon \to 0$ de la fonction $v^{(\varepsilon)}(x, t)$ qui prend les mêmes valeurs que $v(x, t)$ sur l'axe des x pour $|x| \geqslant \varepsilon$ et qui est continue sur tout l'axe des x ainsi que sa dérivée par rapport à x, et monotone. Or, on vient de démontrer dans le théorème 7 que la fonction $v^{(\varepsilon)}(x, t)$, pour $t > 0$, est croissante avec x. Le même a donc lieu pour $v(x, t)$.

Démontrons encore que, pour $t > 0$, on a $v'_x(x, t) > 0$. Il suffit de démontrer pour celà que, pour $t > 0$, l'égalité $v'_x(x, t) = 0$ ne peut avoir lieu. Celà résulte des considérations suivantes. La quantité $v'_x(x, t)$ satisfait, pour $t > 0$, à l'équation (48). Par conséquent, la quantité $\overline{w}(x, t) = e^{Mt} v'_x(x, t)$, M étant la borne supérieure des valeurs de $\left|\frac{\partial F}{\partial v}\right|$, satisfait à l'équation

$$\frac{\partial \overline{w}}{\partial t} - \frac{\partial^2 \overline{w}}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial F}{\partial v} + M\right) \overline{w}.$$

Comme

$$\frac{\partial F}{\partial v} + M \geqslant 0$$

et en vertu du théorème 2, la fonction $\overline{w}(x, t)$, pour $t > t_0 > 0$, n'est pas inférieure à la fonction $\overline{\overline{w}}(x, t)$ qui, pour $t = t_0$, coïncide avec $\overline{w}(x, t)$ et, pour $t > t_0$, satisfait à l'équation

$$\frac{\partial \overline{\overline{w}}}{\partial t} - \frac{\partial^2 \overline{\overline{w}}}{\partial x^2} = 0.$$

Cette dernière fonction est, pour t_0 assez petit, positive pour $t > t_0$ puisque, pour $t = t_0$, la fonction $\overline{w}(x, t)$ n'est pas égale à zéro identiquement.

Dans tout ce qui va suivre nous désignerons par $v(x, t)$ une fonction satisfaisant, pour $t > 0$, à l'équation (29), s'annulant pour $t = 0$, $x < 0$ et devenant égale à l'unité pour $t = 0$ et $x > 0$.

$v_t - v_{xx} = F(v)$
$v_0 = H$

Théorème 10. *Pour tout $x < 0$ fixe, on a*

$$v(x - 2t, t) \underset{t \to +\infty}{\to} 0.$$

Démonstration. La fonction $\bar{v}(x, t) \equiv v(x-2t, t)$ satisfait à l'équation

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} - \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} = -2\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + F(\bar{v})$$

et la fonction [1]) $v^*(x, t) = v(x-2t, t)e^{-x}$ à l'équation

$$\frac{\partial v^*}{\partial t} - \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^2} = (F(\bar{v}) - \bar{v})e^{-x}.$$

$F'(0)<1$ $F'(0)=1$

Vu les conditions (32) et (33) imposées à $F(v)$ on a $F(v) - v \leqslant 0$. Par conséquent $v^*(x, t)$ est inférieure à la fonction qui satisfait à l'équation (37) pour $t > 0$ et prend, pour $t = 0$, la valeur 0 quand $x < 0$, et la valeur e^{-x} quand $x > 0$. Or, cette dernière fonction tend uniformément par rapport à x vers zéro pour $t \to +\infty$.

Théorème 11. *Considérons, pour t fixe, la quantité $v'_x(x, t)$ comme fonction de v, ce qui est possible d'après le théorème 9. Soit*

$$v'_x(x, t) = \psi(v, t). \tag{49}$$

Alors la fonction ψ ne peut pas croître lorsque t croît, v restant invariable.

Démonstration. Considérons les fonctions $v(x, t)$ et $v(x+c, t+t_0) = v_{t_0}(x, t)$, c étant une certaine constante et $t_0 > 0$. Posons

$$w(x, t) = v(x, t) - v_{t_0}(x, t).$$

Soit $\mathfrak{M}$ l'ensemble des point (x, t) où $w(x, t) \geqslant 0$. Démontrons avant tout que cet ensemble n'est borné que de gauche et d'ailleurs par une courbe issue de l'origine et le long de laquelle la coordonnée t ne décroît jamais. Pour le démontrer, remarquons que $w(x, t)$ satisfait à l'équation

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = k(x, t)\, w, \tag{50}$$

où $k(x, t)$ est une certaine fonction bornée, à savoir

$$k(x, t) = F'(\bar{u}(x, t)),$$

$\bar{u}(x, t)$ étant un certain nombre compris entre $v(x, t)$ et $v_{t_0}(x, t)$. Donc, l'ensemble $\mathfrak{M}$ ne peut renfermer des morceaux izolés [2]) qui soient séparés de l'axe des x. Par conséquent, il ne renferme qu'un seul morceau qui touche évidemment au demi-axe des $x > 0$. Pour démontrer que l'ensemble est borné de gauche par une courbe suivant laquelle t ne décroît jamais, admettons le contraire, c. à. d. supposons que cette ligne renferme un morceau d'espèce montrée sur la fig. 4. Admettons, par exemple,

---

[1]) On s'assure aisément que la fonction $v^*(x, t)$ reste bornée pour $t > 0$ borné.

[2]) Pour la démonstration d'une proposition analogue en cas de morceaux finis voir, I. Petrovsky, Compositie Mathematica, I, p. 386—387, 1935. On peut démontrer que la même proposition a lieu pour des morceaux infinis. Comparer la remarque au théorème 1.

que la courbe s'abaisse à partir du point A. Alors la fonction $w(x, t)$ a des valeurs négatives à droite de la ligne OA, tandis que sur OA elle-même elle est égale à 0, et sur l'axe x, pour $x > 0$, prend des valeurs positives. Mais par des méthodes analogues à celles dont on s'est déjà servi dans la démonstration du théorème 4, on démontrer que c'est impossible.

démontre de la même manière que l'ensemble $\mathfrak{M}$ n'est pas borné à droite.

D'après ces remarques, le théorème énoncé se démontre tout simplement. En effet, en choisissant c convenablement, on peut obtenir que les valeurs $v(x_0, t)$ et $v_{t_0}(x_0, t)$ coïncident pour un certain x_0, t étant donné à l'avance. Et alors, vu les raisonnements que l'on vient de citer, on aura pour tout $x > x_0$

$$v(x, t) \geqslant v_{t_0}(x, t)$$

et par conséquent

$$v'_x(x_0, t) \geqslant v'_{t_0 x}(x_0, t),$$

c. q. f. d.

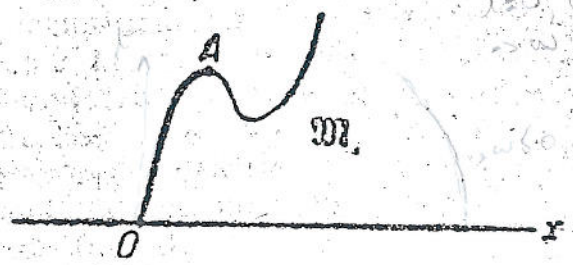

Fig. 4.

Théorème 12. *Pour t quelconque, on a*

$$v'_x(x, t) \geqslant u'(x),$$

$u'' - 2u' + f(u) = 0$

si $v(x, t) = u(x)$. Ici $u(x)$ désigne la solution de l'équation (34) dont on a parlé au début de ce paragraphe.

La démonstration est absolument analogue à celle du théorème précédent. Seulement il faut prendre la fonction $u(x + c)$ au lieu de la fonction $v_{t_0}(x, t)$, et au lieu de la fonction $w(x, t)$ considérer auparavant la différence $v(x, t) - u(x + c)$.

Théorème 13. *Soit*

$$v^*(x, t) = v(x + \varphi(t), t),$$

la fonction $\varphi(t)$ étant choisie de manière qu'on ait partout

$$v^*(0, t) = c = \text{const}.$$

Alors

$$v^*(x, t) \underset{t \to \infty}{\longrightarrow} v^*(x)$$

uniformément par rapport à x.

Démonstration. De l'égalité (49) nous obtenons

$$x = \int_c^{v^*} \frac{dv}{\psi(v, t)}. \tag{51}$$

$\Psi(v,t) = v_x(x,t) \geqslant u'(x)$

$\int_c^{v^*} \frac{dv}{u'(x)} = \frac{(v^* - c)}{u'(x)}$

La fonction sous le signe de l'intégrale croît d'une façon monotone pour $t \to \infty$ en vertu du théorème 11. Outre celà, en vertu du théorème 12, l'intégrale $\int_c^{v^*} \frac{dv}{\psi(v, t)}$ ne croît pas infiniment. On peut donc

dans l'egalité (51) passer à la limite sous le signe de l'intégrale. $t \to +\infty$

$$\psi(v, t) \to \psi(v).$$

Alors l'égalité (51) devient à la limite

$$x = \int_c^{v^*} \frac{dv}{\psi(v)}.$$

Comme on a, d'après le théorème 12,

$$\psi(v) > 0,$$

cette égalité définit une certaine fonction v^* de x. Il reste à démontrer la convergence uniforme de $v^*(x, t)$ vers $v^*(x)$. Remarquons pour cela que de (51) résulte la convergence uniforme de $x(v^*, t)$ vers $x(v^*)$ sur tout intervalle $\varepsilon < v^* < 1 - \varepsilon$. Si maintenant on tient compte de ce que la fonction $\psi(v^*, t)$, selon le théorème 11, reste bornée sur un tel intervalle, on en déduit la convergence uniforme de $v^*(x, t)$ vers $v^*(x)$ pour les valeurs de x où $v^*(x)$ est comprise entre les nombres ε et $1 - \varepsilon$, ε étant arbitraire. Au delà de cet intervalle des valeurs de x, $v^*(x, t) \to v^*(x)$ uniformément car, pour t assez grand, la fonction $v^*(x, t)$ ne peut prendre que les valeurs peu différentes de 0 et 1.

Théorème 14. *Pour $t_0 \to +\infty$ la fonction*

$$v_{t_0}(x, t) = v(x + \varphi(t_0), t + t_0)$$

converge uniformément dans le domaine $t \leqslant T = \text{const}$ vers une certaine solution $\bar{v}(x, t)$ de l'équation (29). *La fonction $\varphi(t_0)$ est définie de manière que pour tout t_0*

$$v_{t_0}(0, t_0) = c = \text{const}.$$

Démonstration. La fonction

$$w(x, t) = v_{t_0}(x, t) - v_{t_0+T}(x, t)$$

satisfait à l'équation

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = F'(\bar{v})\, w, \tag{52}$$

$\bar{v}(x, t)$ étant comprise entre $v_{t_0}(x, t)$ et $v_{t_0+T}(x, t)$. En vertu du théorème 13 on a, pour t_0 assez grand,

$$|w(x, 0)| < \varepsilon,$$

$\varepsilon > 0$ étant arbitrairement petit. Conformément aux théorèmes 2 et 3, $w(x, t)$ est inférieur à la fonction $\bar{w}(x, t) = \varepsilon e^{kt}$, k étant la borne supérieure des valeurs de $|F'(v)|$; $\bar{w}(x, t)$ prend pour $t = 0$ des valeurs non inférieurs à $w(x, 0)$ et satisfait, pour $t > 0$, à l'équation

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} - \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} = k|\bar{w}|$$

dont le second membre, pour $w = \overline{w}$, n'est pas inférieur au second membre de (52). On démontre de même que

$$w(x, t) > -\varepsilon e^{kt}.$$

$|w| < \varepsilon e^{kt} \quad \forall \varepsilon > 0$
$w \to 0$ unif

Ainsi, l'on a démontré que la suite des fonctions $v_{t_0}(x, t)$ converge, pour $t_0 \to +\infty$, uniformément dans un certain domaine $t < T$ vers une fonction que nous désignerons par $\overline{v}(x, t)$. Démontrons que $\overline{v}(x, t)$ satisfait à l'équation (29).

Moyennant l'égalité (42), nous écrivons

$$v_{t_0}(x, t) = v_{t_0,0}(x, t) + \\ + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\eta)}}}{\sqrt{t-\eta}} F(v_{t_0}(\xi, \eta))\, d\xi. \tag{53}$$

On peut dans l'égalité (53) passer à la limite en remplaçant v_{t_0} par $\overline{v}$. La fonction qui satisfait à l'équation (53) satisfait aussi à l'équation (29), comme on l'a déjà fait voir dans la démonstration du théorème 1.

Théorème 15. *Pour $t_0 \to +\infty$, les dérivées partielles du premier ordre de la fonction $v_{t_0}(x, t)$ par rapport à x et à t s'approchent des dérivées partielles correspondantes de $\overline{v}(x, t)$, et celà uniformément dans tout domaine $\varepsilon < t < T$, ε et T étant des constantes positives quelconques.*

Démonstration. La convergence uniforme de $\frac{\partial v_{t_0}}{\partial x}$ se démontre en vertu de l'égalité (53). En effet, la convergence uniforme, pour $t > \varepsilon$, de la dérivée partielle par rapport à x de la première composante du second membre résulte de ce que cette composante se représente par une intégrale de Poisson. Pour démontrer le même par rapport à la seconde composante, formons la différence de ses valeurs pour deux valeurs de t_0, soit $\overline{t_0}$ et $\overline{\overline{t_0}}$; elle est égale à

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\eta)}}}{\sqrt{t-\eta}} [F(v_{\overline{t_0}}) - F[v_{\overline{\overline{t_0}}}]]\, d\xi. \tag{54}$$

D'après le théorème 14, la quantité

$$F(v_{\overline{t_0}}(\xi, \eta)) - F(v_{\overline{\overline{t_0}}}(\xi, \eta))$$

est arbitrairement petite, $\overline{t_0}$ et $\overline{\overline{t_0}}$ étant assez grands. En appliquant dans ce cas le résultat de Gevrey, cité déjà sur la page 17, nous trouvons que la dérivée partielle par rapport à x de (54), $\overline{t_0}$ et $\overline{\overline{t_0}}$ étant assez grands, devient aussi petite qu'on le voudra uniformément par rapport à x, si $t < T$.

La fonction $w_{t_0}(x, t) = \frac{\partial v_{t_0}(x, t)}{\partial x}$ satisfait à l'équation

$$\frac{\partial w_{t_0}}{\partial t} - \frac{\partial^2 w_{t_2}}{\partial x^2} = F'(v_{\overline{t_0}})\, w_{t_0}.$$

Nous avons déjà démontré la convergence, uniforme pour $\varepsilon < t < T$, du second membre de cette équation pour $t_0 \to \infty$. Aussi les mêmes procédés qui nous ont servi pour démontrer la convergence uniforme de $\frac{\partial v_{t_0}}{dx}$, s'appliquent à la démonstration de la convergence uniforme de $\frac{\partial w_{t_0}}{\partial x} = \frac{\partial^2 v_{t_0}}{\partial x^2}$. Et comme la fonction v_{t_0} satisfait à l'équation (29), on voit par là que la convergence de $\frac{\partial v_{t_0}}{\partial t}$ est uniforme.

Théorème 16. *Admettons que la fonction $v_{t_0}(x, t)$ (resp. $\bar{v}(x, t)$) reste, le long de la courbe $x = \varphi_{t_0}(t)$ (resp. $x = \varphi(t)$) constamment égale à c. Alors on a, uniformément par rapport à t pour $\varepsilon < t < T$,*

$$\varphi'_{t_0}(t) \underset{t \to \infty}{\to} \varphi'(t).$$

Démonstration. La quantité $\varphi'_{t_0}(t)$ (resp. $\varphi'(t)$) est égale à

$v_{t_0}(\varphi_{t_0}(t), t) = C$
et dérive / t

$$-\frac{\frac{\partial v_{t_0}}{\partial t}}{\frac{\partial v_{t_0}}{\partial x}} \quad \left(\text{resp.} - \frac{\frac{\partial \bar{v}}{\partial t}}{\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}} \right)$$

au point $(\varphi_{t_0}(t), t)$ (resp. $(\varphi(t), t)$). D'après les théorèmes 12 et 14 on a pour t_0 assez grand

$$|\varphi_{t_0}(t) - \varphi(t)| < \varepsilon_1$$

dans le domaine $\bar{G}$, défini par les inégalités $\varepsilon < t < T$, $\varepsilon_1 > 0$ étant arbitrairement petit. D'après le théorème 15 les numérateurs et dénominateurs des quotients

$$\frac{\frac{\partial v_{t_0}}{\partial t}}{\frac{\partial v_{t_0}}{\partial x}} \quad \text{et} \quad \frac{\frac{\partial \bar{v}}{\partial t}}{\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}} \tag{55}$$

diffèrent entre eux aussi peu qu'on le voudra, uniformément dans $\bar{G}$. En outre, dans la bande $\varphi(t) - \varepsilon_2 < x < \varphi(t) + \varepsilon_2$ la quantité $\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}$ est supérieure à une certaine constante positive. C'est pourquoi les quotients (55) diffèrent entre eux, pour t_0 assez grand, de moins de ε_3 dans la bande

$$\varepsilon < t < T, \quad \varphi(t) - \varepsilon_2 < x < \varphi(t) + \varepsilon_2.$$

Le quotient $\frac{\frac{\partial \bar{v}}{\partial t}}{\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}}$ étant uniformément continu dans cette bande, ses valeurs, aux points de cette bande avec un même t, diffèrent, pour ε_3 assez petit, les unes des autres aussi peu qu'on le voudra; d'où suit le théorème à démontrer.

Théorème 17. *On a pour t quelconque*

$$\bar{v}(x, t) = u(x+2) \quad et \quad \frac{d\varphi}{dt} \underset{t\to\infty}{\to} -2$$

(*les notations sont les mêmes que dans le théorème* 14).

Démonstration. Considérons la fonction

$$v^*(x, t) = \bar{v}(x + c_1(t), t),$$

où la fonction $c_1(t)$ est choisie de manière que

$$v^*(0, t) \equiv c \equiv \text{const}.$$

Alors

$$\frac{\partial v^*}{\partial t} = \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^2} + c_1'(t)\frac{\partial v^*}{\partial x} + F(v^*).$$

Mais d'autre part, d'après la définition de $\bar{v}(x, t)$, la quantité $v^*(x, t)$, est pour tout x indépendente de t. Donc,

$$\frac{\partial v^*}{\partial t} = 0 \quad \text{et} \quad c_1'(t) = \text{const}.$$

D'après le § 2, cette constante ne peut être supérieure à -2. Mais, d'après le théorème 10, cette constante ne peut être inférieure à -2. Par conséquent, elle est égale à -2 et, en vertu du théorème 16

$$\frac{d\varphi}{dt} \underset{t\to\infty}{\to} -2,$$

c. q. f. d.

Remarque. Admettons que les valeurs initiales de $v(x, t)$ n'étaient pas telles comme on les supposait jusqu'ici, mais étaient les suivantes:

1) $v(x, 0) = 1 \quad (x \geqslant c_1)$;

2) $v(x, 0) = 0 \quad (x \leqslant c_2 < c_1)$;

3) $v(x, 0)$ prend pour $c_2 < x < c_1$ des valeurs quelconques comprises entre 0 et 1. On voit alors aisément que la vitesse du déplacement à gauche de la portion à laquelle se rapporte la partie principale de l'abaissement de v de 1 à 0 se rapprocherait encore pour $t \to \infty$ de 2, car dans ce cas on aurait

$$v(x - c_1, t) \leqslant \bar{v}(x, t) \leqslant v(x - c_2, t),$$

$\bar{v}(x, t)$ désignant la solution de l'équation (29) satisfaisant aux nouvelles conditions initiales.